

附录

答案及解析



第 1 章 计数原理

第 1 节 两个计数原理及排列与组合



题型上分练

1. B 【解析】先从四对双胞胎中选出一对,有 4 种选择;
然后从剩下的 6 人中选出 2 人,且这 2 人不能是一对双胞胎,这相当于从三对双胞胎中选出两对,再从每对中选出一人,共有 $3 \times 2 \times 2 = 12$ (种) 选择.
根据分步乘法计数原理,总共有 $4 \times 12 = 48$ (种) 选法. 故选 B.
2. B 【解析】从 4 名同学中选 1 名抽到自己心仪国家,有 4 种选法,设剩下的 3 名同学分别为甲、乙、丙,他们心仪的国家分别为 A, B, C ,当甲抽到 B 时,乙只能抽到 C ,丙只能抽到 A ;当甲抽到 C 时,乙只能抽到 A ,丙只能抽到 B ,共 2 种情况 (提示:分类加法计数原理), $\therefore$ 仅有 1 名同学抽到自己心仪的国家的抽取方法数为 $4 \times 2 = 8$ (提示:分步乘法计数原理).
3. D 【解析】直接按 A, B, C, D, E, F, G 的顺序涂色,逐步分析各个步骤的可能数,最后根据分步乘法计数原理求解即可.
从四个不同的颜色中选一种颜色给 A 涂色,有 4 种可能,再给 B 涂色,有 3 种可能,给 C 涂色,有 2 种可能,给 D 涂色,有 2 种可能,给 E 涂色,有 3 种可能,给 F 涂色,有 2 种可能,给 G 涂色,有 2 种可能,这样给七个正六边形区域 A, B, C, D, E, F, G 涂色,不同的涂色方案有 $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 576$ (种). 故选 D.
4. 18 【解析】不妨将 4 块排成一排的地砖从左至右依次记为 A, B, C, D . 用 3 种颜色给地砖上色,每种颜色至少使用一次,相邻地砖不能同色,所以一定有 2 块地砖同色,同色的情况有 $(A, C), (A, D), (B, D)$, 共 3 种,所以共有 $3A_3^3 = 18$ (种) 不同的 3-上色方案.

A	B	C	D
---	---	---	---

5. 390 【解析】第一步,安排女性普法员,分别去两个社区,有 $3 \times 2 = 6$ (种) 安排方案;
第二步,安排 4 名男性普法员去三个社区,总共有 $3^4 = 81$ (种) 方案,
其中一个社区没人,即 4 名男性普法员都前往女性普法员所在社区,共有 $2^4 = 16$ (种) 方案,
因为每个社区至少有 1 名普法员,所以男性普法员的安排方案有 $81 - 16 = 65$ (种) (提示:正难则反).
由分步乘法计数原理可知,共有 $6 \times 65 = 390$ (种) 不同的方案.



6. D 【解析】(特殊元素优先法) 甲的位置比较特殊, 可以优先排甲, 考虑特殊元素优先法.

按甲的安排进行分类讨论:

①甲排第一, 则乙、丙等 4 人有 $A_4^4 = 24$ (种) 排法;

②甲排第二, 则乙、丙排后三位中的两位, 有 $A_3^2 \times A_2^2 = 12$ (种) 排法;

③甲排第三, 则乙、丙排最后两位, 有 $A_2^2 \times A_2^2 = 4$ (种) 排法.

故共有 $24 + 12 + 4 = 40$ (种) 排法. 故选 D.

7. B 【解析】(不相邻问题——插空法) 题干中出现不相邻, 优先考虑插空法.

首先排黄、蓝色小球, 则共 4 个小球, 相当于 4 个位置中选 2 个放黄球, 另 2 个放蓝球共有 $C_4^2 = 6$ (种) (易错: 颜色相同的小球并无差异, 所以不能全排列), 放好 4 个小球后, 选 2 个空位插入 2 个红球, 共有 $C_5^2 = 10$ (种). 综上, 共有 $6 \times 10 = 60$ (种) 排法.

8. D 【解析】根据题意, 分 C 是第一个和 C 不是第一个且不是最后一个两类情况讨论, 结合排列数和组合数的计算公式以及分类加法计数原理, 即可求解.

当 C 第一个出场时, 将剩余的 A, B, D, E 全排列, 共有 $A_4^4 = 24$ (种) 不同的排法.

当 C 不是第一个出场且不是最后一个出场时, 先排第一个, 从 D, E 中选 1 人第一个出场, 有 2 种选法;

再排 C, 有三个位置可选, 有 3 种排法, 剩余 3 人全排列, 有 $A_3^3 = 6$ (种) 排法, 所以共有 $2 \times 3 \times 6 = 36$ (种) 不同的排法.

由分类加法计数原理, 共有 $24 + 36 = 60$ (种) 不同的出场顺序.

9. B 【解析】(定序思想, 倍缩法) 由题意可知, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(8) = 4$, $\varphi(10) = 4$, 即将 1, 2, 2, 4, 4 排成一列, 则组成不同的五位数的个数为 $\frac{A_5^5}{A_2^2 A_2^2} = 30$. 故选 B.

10. 144 【解析】这 6 项对应的数字中有 2 个 1, 所以先考虑排其他数字.

先排数字 2, 3, 5, 8, 有 A_4^4 种排法, 4 个数字形成 5 个空, 再考虑排两个 1, 有两类情况:

①若两个 1 相邻(提示: 捆绑法), 且数字 1 与 2 不相邻, 则应从可选择的 3 个空中选 1 个放入两个 1, 有 3 种排法;

②若两个 1 不相邻, 且数字 1 与 2 不相邻, 则应从可选择的 3 个空中选 2 个分别放入数字 1, 有 3 种排法.

由分步乘法计数原理可得不同的密码有 $A_4^4 \cdot (3 + 3) = 144$ (种).

11. 12 【解析】由每一行从左到右、每一列从上到下的数字依次变小, 得 9 在左上角, 1 在右下角, 如图.

9	a	b
c	4	d
e	f	1

2, 3 排在 d, f 位置, 有 A_2^2 种方法,



从余下的 4 个数字中任取 2 个按从左到右由大到小排在 a, b 位置, 有 C_4^2 种方法,

最后 2 个数字从上到下由大到小排在 c, e 位置, 有 1 种方法,

所以填写方格表的方法共有 $A_2^2 C_4^2 \times 1 = 12$ (种).

12. A 【解析】在 $1, 2, 3, \dots, 9$ 中任取 4 个数, 其大小关系确定, 所以四位数中的“渐升数”共有 $C_9^4 = 126$ (个). 故选 A.

13. B 【解析】根据题意, 他们选的景点完全相同的选法有 $C_5^2 = 10$ (种), 恰有 1 个景点相同的选法有 $C_5^1 A_4^2 = 60$ (种), 故总的选法有 $10 + 60 = 70$ (种).

14. C 【解析】由题意, 美术组要抽取的学生数为 $30 \times \frac{20}{100} = 6$,

音乐组要抽取的学生数为 $30 \times \frac{30}{100} = 9$, 舞蹈组要抽取的学生

数为 $30 \times \frac{50}{100} = 15$, 则不同的抽样结果共有 $C_{20}^6 C_{30}^9 C_{50}^{15}$ 种.

15. D 【解析】(间接法) 一共有 6 位老师, 将这 6 位老师安排到 A, B 两所乡村中学任教, 要求两所乡村中学各安排 3 位老师, 共有 $C_6^3 = 20$ (种) 方式, 若 A 中学不安排数学老师, 则有 $C_4^3 = 4$ (种) 方式, 则 A 中学至少安排 1 位数学老师共有 $20 - 4 = 16$ (种) 方式.

一题多解 (直接法) 情况 1: A 中学安排 1 位数学老师、2 位英语老师, 有 $C_2^1 C_4^2 = 2 \times 6 = 12$ (种) 方式;

情况 2: A 中学安排 2 位数学老师、1 位英语老师, 有 $C_2^2 C_4^1 = 1 \times 4 = 4$ (种) 方式,

所以 A 中学至少安排 1 位数学老师有 $12 + 4 = 16$ (种) 方式.

16. B 【解析】此问题等价于将 6 人分为三组, 每组 2 人, 安排到三个不同的列上, 每组中身高较高者在后, 身高较矮者在前, 再结合分步乘法计数原理求结论.

第一步: 为第一列挑选 2 人, 有 $C_6^2 = 15$ (种) 方法;

第二步: 为第二列挑选 2 人, 有 $C_4^2 = 6$ (种) 方法;

第三步: 剩下 2 人到第三列, 有 $C_2^2 = 1$ (种) 方法.

根据分步乘法计数原理, 总排法为 $15 \times 6 \times 1 = 90$ (种). 故选 B.

17. C 【解析】从 $(n+1)$ 个球中抽取 m 个球用组合数公式表示为 C_{n+1}^m , 但选项中没有该式, 所以要找与 C_{n+1}^m 等价的式子.

将取球分为两类:

第一类, 取出的球中不含有红球, 则需从剩下的 n 个球中取 m 个球, 有 C_n^m 种方法;

第二类, 取出的球中含有红球, 则只需从余下的 n 个球中再取 $(m-1)$ 个球, 有 C_n^{m-1} 种方法, 故共有 $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$ (种)

方法 (另解: 利用组合数的性质 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ 直接解题).

故选 C.

18. B 【解析】第一类: 第一步, 从 1 到 5 号方格中选出 3 个, 填



入“c”“o”“l”,有 $C_5^3 = 10$ (种)方法;第二步,从7到12号方格中选出3个,填入“e”“c”“t”,有 $C_6^3 = 20$ (种)方法.所以此时得到的结果从左至右仍为单词“collect”的填法有 $10 \times 20 = 200$ (种).

第二类:第一步,从1到5号方格中选出2个,填入“c”“o”,有 $C_5^2 = 10$ (种)方法;第二步,从7到12号方格中选出4个,填入“l”“e”“c”“t”,有 $C_6^4 = 15$ (种)方法.所以此时得到的结果从左至右仍为单词“collect”的填法有 $10 \times 15 = 150$ (种).

综上,得到的结果从左至右仍为单词“collect”的填法共有 $200 + 150 = 350$ (种). 故选 B.

19. $\frac{32}{225}$ 【解析】某人先后两次任意摸取小球,每次至少摸取1个小球,则每次摸球的情况有 $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ (种),所以先后两次任意摸取小球共有 $15 \times 15 = 225$ (种)情况.

两次记下的小球颜色能凑齐4种,且恰有1种颜色两次都被记下的情况有:

第一次摸取1个小球,第二次摸取4个小球,共有 $C_4^1 C_4^4 = 4$ (种)情况;

第一次摸取2个小球,第二次摸取3个小球,共有 $C_4^2 C_3^1 = 12$ (种)情况;

第一次摸取3个小球,第二次摸取2个小球,共有 $C_4^3 C_3^1 = 12$ (种)情况;

第一次摸取4个小球,第二次摸取1个小球,共有 $C_4^4 C_4^1 = 4$ (种)情况.

所以两次记下的小球颜色能凑齐4种,且恰有1种颜色两次都被记下的概率为 $\frac{4+12+12+4}{225} = \frac{32}{225}$.

20. A 【解析】3名游客,四个主题,每人至少从中选择一个主题体验且每个主题都恰有1人体验,则必有1名游客选择两个主题,其余2人各选择一个主题,则不同的体验方法共有 $C_3^1 C_4^2 A_2^2 = 36$ (种).

21. A 【解析】(相同元素分组,隔板法)三元一次方程组 $x+y+z=8$ 的正整数解的组数等价于将8个小球分为3组,每组至少1个小球的不同分法.只需要在8个小球中间的7个空位中选取2个空位用隔板隔开即可,则有 $C_7^2 = 21$ (种)分法,即三元一次方程 $x+y+z=8$ 的正整数解的组数为21.

刷有所得 隔板法

若把 n 个不加区分的“相同元素”分成 m ($n > m$) 组,可通过把 n 个“相同元素”排成一排,在 $(n-1)$ 个空隙中插入 $(m-1)$ 块隔板来完成分组.

22. C 【解析】第一类:当3位同学分得的书法作品数为1,1,5时,共有 $\frac{C_7^1 C_6^1 C_5^5}{A_2^2} A_3^3 = 126$ (种)奖励方案(提示:部分均匀分组问题分组时要除以相同数目的组数的排列数);



第二类:当3位同学分得的书法作品数为1,2,4时,共有 $C_7^1 C_6^2 C_4^4 A_3^3 = 630$ (种)奖励方案;

第三类:当3位同学分得的书法作品数为1,3,3时,共有 $\frac{C_7^1 C_6^3 C_3^3}{A_2^2} A_3^3 = 420$ (种)奖励方案;

第四类:当3位同学分得的书法作品数为2,2,3时,共有 $\frac{C_7^2 C_5^2 C_3^3}{A_2^2} A_3^3 = 630$ (种)奖励方案.

由分类加法计数原理知共有 $126 + 630 + 420 + 630 = 1806$ (种)不同奖励方案. 故选 C.

23. A 【解析】将这6名教师分成四组,再分配到不同的学校,若教师人数为3,1,1,1,则不同的安排方法有 $C_6^3 \times A_4^4 = 480$ (种);

若教师人数为2,2,1,1,则不同的安排方法有 $\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times A_4^4}{A_2^2} = 1080$ (种).

故不同的安排方法共有 $480 + 1080 = 1560$ (种).

将这6名教师分成四组,再分配到不同的学校,甲、乙安排在同一所学校,

若教师人数为3,1,1,1,则不同的安排方法有 $C_4^1 \times A_4^4 = 96$ (种);

若教师人数为2,2,1,1,则不同的安排方法有 $C_4^2 \times A_4^4 = 144$ (种).

故不同的安排方法共有 $96 + 144 = 240$ (种).

所以所求事件的概率为 $\frac{240}{1560} = \frac{2}{13}$. 故选 A.

24. 30 【解析】首先从5名志愿者中选出1人去A小区,共有 $C_5^1 = 5$ (种)情况;

再从剩下的4名志愿者中选出2人去B小区,共有 $C_4^2 = 6$ (种)情况,剩下的2人安排到C小区,

因此不同的安排方案共有 $6 \times 5 = 30$ (种).



综合提分练

1. A 必刷考点 ①特殊元素、位置问题

【解析】把甲、乙捆绑在一起处理共有 A_2^2 种方法(提示:捆绑法),此时相当于有5个元素,丙不坐在两端则丙有 C_3^1 种选法(提示:特殊元素优排法),然后对剩下的三名同学和甲、乙一起进行全排列,共有 A_4^4 种方法,则不同的座位排列方式共有 $A_2^2 C_3^1 A_4^4 = 144$ (种).

2. D 必刷考点 ②两个计数原理的综合应用

【解析】①根据 x, y, z 中0的个数进行分类,分四种情况讨论;②题干所说的是“整数”,注意有正、负两种情况.

若 x, y, z 全为0,则有序整数数组的个数为1;

若 x, y, z 中有2个为0,则有序整数数组的个数为 $3 \times 6 \times 2 = 36$ (提示:3个数中有2个0的情况有3种;非零整数的绝对值可以取1~6,共6种;考虑正负,共2种);

若 x, y, z 中有1个为0,则有序整数数组的个数为 $3 \times (5 + 4 + 3 +$



$2+1) \times 4 = 180$ (提示: 3 个数中有 1 个 0 的情况有 3 种; 两个非零数的和不大于 6, 若其中 1 个取 1, 则另一个可以取 1~5 共 5 种, 以此类推; 两个数考虑正负, “++”, “--”, “+-”, “-+” 共 4 种);

若 x, y, z 中没有 0, 易知 $|x| + |y| + |z| = 3$ 或 4 或 5 或 6 (提示: 3: 111; 4: 112; 5: 113, 122; 6: 114, 123, 222), 则有序整数组的个数为 $(1 + C_3^2 + 2C_3^2 + C_3^2 + A_3^3 + 1) \times 8 = 160$.

所以有序整数组 (x, y, z) 的个数为 $1 + 36 + 180 + 160 = 377$. 故选 D.

3. C 必刷题型 ⊙ 涂色问题

【解析】若只用 2 种不同的颜色, 则正、反面的上、下区域同色, 中间区域涂剩下的一种颜色即可, 共有 $C_3^2 \times A_2^2 = 6$ (种) 涂色方法.

若用 3 种不同的颜色, 当正、反面都只用 2 种颜色时, 有 $C_3^2 \times A_2^2 \times C_2^1 = 12$ (种) 涂色方法; 当正面用 2 种颜色, 反面用 3 种颜色时, 则在正面未用的颜色不能涂在反面的中间, 所以有 $C_3^2 \times A_2^2 \times C_2^1 = 12$ (种) 涂色方法; 同理, 当正面用 3 种颜色, 反面用 2 种颜色时, 也有 $C_3^2 \times A_2^2 \times C_2^1 = 12$ (种) 涂色方法; 当正、反两面都用 3 种颜色时, 有 $A_3^3 \times 2 = 12$ (种) 涂色方法.

所以共有 $6 + 12 + 12 + 12 + 12 = 54$ (种) 不同的涂色方法. 故选 C.

4. 26 必刷考点 ⊙ 分类加法计数原理

【解析】“百位”拨动 3 枚算珠可以表示的不同的三位整数有 300, 700;

“百位”拨动 2 枚算珠可以表示的不同的三位整数有 210, 250, 201, 205, 610, 650, 601, 605;

“百位”拨动 1 枚算珠可以表示的不同的三位整数有 120, 102, 160, 106, 111, 151, 115, 155, 520, 502, 506, 560, 511, 551, 515, 555. 所以符合条件的三位整数的个数为 26.

5. 48 必刷考点 ⊙ 分类加法计数原理、分组分配问题

【解析】(间接法) 由题意, 可得 6 人分成两组的人数比为 4 :

2 或 3 : 3, 则有 $C_6^4 C_2^2 A_2^2 + \frac{C_6^3 C_3^3}{A_2^2} A_2^2 = 50$ (种) 不同的方案,

其中 2 名女志愿者单独成组分配的情况数为 2,

则满足题意的不同的方案共有 $50 - 2 = 48$ (种).

6. 88 必刷考点 ⊙ 两个计数原理的综合应用

【解析】题干中给出每人至少选择 1 个景点打卡, 每个景点都有且仅有一人打卡, 则 A 最少选择 1 个景点, 最多选择 3 个景点. 又 A 在北京故宫、西安兵马俑中至少选择 1 个, 可根据 A 在北京故宫、西安兵马俑中的选择情况及 A 总共选择的景点个数进行分类.

当 A 只选择北京故宫、西安兵马俑中的 1 个, 且只去这 1 个景点时, 有 $C_2^1 = 2$ (种) 选择, 再将其他 4 个景点分给 B, C, 有



$\left(C_4^1 C_3^3 + \frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2}\right) A_2^2 = 14$ (种) 选择, 共有 $2 \times 14 = 28$ (种) 选择;

当 A 只选择北京故宫、西安兵马俑中的 1 个, 且去 2 个景点时, 有 $C_2^1 C_3^1 = 6$ (种) 选择, 再将其他 3 个景点分给 B, C , 有 $C_3^1 C_2^2 A_2^2 = 6$ (种) 选择, 共有 $6 \times 6 = 36$ (种) 选择;

当 A 只选择北京故宫、西安兵马俑中的 1 个, 且去 3 个景点时, 有 $C_2^1 C_3^2 = 6$ (种) 选择, 再将其他 2 个景点分给 B, C , 有 $A_2^2 = 2$ (种) 选择, 共有 $6 \times 2 = 12$ (种) 选择;

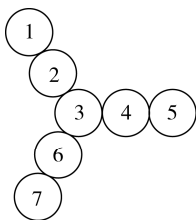
当 A 选择北京故宫、西安兵马俑这 2 个景点且只去这 2 个景点时, 只需将其他 3 个景点分给 B, C , 有 $C_3^1 C_2^2 A_2^2 = 6$ (种) 选择;

当 A 选择北京故宫、西安兵马俑这 2 个景点且去 3 个景点时, 有 $C_3^1 = 3$ (种) 选择, 只需将其他 2 个景点分给 B, C , 有 $A_2^2 = 2$ (种) 选择, 共有 $3 \times 2 = 6$ (种) 选择.

故共有 $28 + 36 + 12 + 6 + 6 = 88$ (种) 不同的打卡方案.

7.216 必刷考点 ⊙ 两个计数原理的综合应用、排列问题

【解析】将这 7 个装饰品编号如图所示.



分以下两种情况讨论:

第一种: 第一步, 取 1, 5, 7 号装饰品, 则有 A_3^3 种不同的取法; 第二步, 从 2, 4, 6 号装饰品中依次取 2 个, 则有 A_3^2 种不同的取法;

第三步, 将剩余的 2 个装饰品依次取下, 则有 A_2^2 种不同的取法. 故不同的取法种数为 $A_3^3 A_3^2 A_2^2 = 72$.

第二种: 将 (1, 2), (4, 5), (6, 7) 视为三个整体, 前 3 个装饰品从其中一个整体和一个不与 3 号装饰品相邻的装饰品中依次取下, 则有 6 种取法, 以 1, 2, 5 为例, 这 3 个装饰品有 (1, 2, 5), (1, 5, 2), (5, 1, 2), 共 3 种顺序, 剩余 3, 4, 6, 7 号装饰品, 先从 4, 7 号装饰品中取下 1 个, 有 2 种情况, 比如先取 7 号装饰品, 故剩余 3 个相邻的装饰品, 接下来从 4, 6 号装饰品中取 1 个, 有 2 种情况, 最后剩余 2 个装饰品的先后顺序任意, 故不同的取法种数为 $6 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 144$.

综上所述, 不同的取法种数为 $72 + 144 = 216$.

真题风向练

8.C 命题点 ⊙ 排列组合的综合应用

【解析】先把除甲、乙、丙、丁外的其余 4 人分成人数分别为 1, 3 的两组, 有 $C_4^1 \cdot C_3^3$ 种分法, 再把丙、丁各放入一组, 共有 2 种放法, 然后把甲、乙放到 2 人组内, 只有 1 种放法, 再对应



不同组别有 A_2^2 种方法, 所以共有 $C_4^1 \cdot C_3^3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_2^2 = 16$ (种)方法, 故选 C.

第2节 二项式定理



题型上分练

1. B 【解析】在 $(1+3x)^5$ 的展开式中, 含 x^2 的项为 $C_5^2(3x)^2 = 90x^2$. 故选 B.

2. A 【解析】二项式 $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^n$ 的通项为 $T_{r+1} = C_n^r (2x)^{n-r} \cdot$

$$\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r \cdot 2^{n-r} \cdot C_n^r \cdot x^{n-3r},$$

要存在常数项, 需满足 $n-3r=0$, 即 $n=3r$.

因为 $n \in \mathbf{N}^*, r \in \mathbf{N}$ 且 $0 \leq r \leq n$, 所以 n 必须是 3 的正整数倍.

关键点

取 $r=1$, 则 $n=3$. 故选 A.

3. A 【解析】依题意, $(2x+2)^6$ 的展开式中含 x^3 的项为 $C_6^3(2x)^3 \cdot 2^3 = 2^6 C_6^3 x^3$, 其系数为 $2^6 C_6^3 = 1\,280$.

$a(x+1)^3$ 的展开式中含 x^3 的项为 ax^3 , 其系数为 a .

由展开式中 x^3 的系数为 0, 得 $a+1\,280=0$, 所以 $a=-1\,280$.

故选 A.

4. B 【解析】求出 $(1+x)^7$ 的展开式的通项, 再利用多项式乘法法则求出含 x^3 的项即可.

$(1+x)^7$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_7^r x^r, r \in \mathbf{N}, r \leq 7$, 因此

$$\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)(1+x)^7 \text{ 的展开式中含 } x^3 \text{ 的项为 } 1 \cdot C_7^3 x^3 + \frac{1}{x^3} \cdot C_7^6 x^6$$

$$= 42x^3, \text{ 所以 } \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)(1+x)^7 \text{ 的展开式中, } x^3 \text{ 的系数为 } 42. \text{ 故}$$

选 B.

5. D 【解析】 $(1+x)^5$ 的展开式的通项 $T_{m+1} = C_5^m \cdot 1^{5-m} \cdot x^m = C_5^m \cdot x^m, m=0, 1, 2, 3, 4, 5$, $(1+y)^5$ 的展开式的通项 $T_{n+1} = C_5^n \cdot 1^{5-n} \cdot y^n = C_5^n \cdot y^n, n=0, 1, 2, 3, 4, 5$, 所以 $(1+x)^5(1+y)^5$ 的展开式中, 含 $x^m y^n$ 的项的系数 $a_{m,n} = C_5^m C_5^n$,

因为 $m+n=4, m, n \in \mathbf{N}$, 所以 (m, n) 的所有组合为 $(0, 4), (1,$

$3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$, 所以 $a_{0,4} = C_5^0 C_5^4 = 5, a_{1,3} = C_5^1 C_5^3 =$

$50, a_{2,2} = C_5^2 C_5^2 = 100, a_{3,1} = C_5^3 C_5^1 = 50, a_{4,0} = C_5^4 C_5^0 = 5$, 所以 $a_{0,4} +$

$$a_{1,3} + a_{2,2} + a_{3,1} + a_{4,0} = 5 + 50 + 100 + 50 + 5 = 210.$$

6. 2 【解析】由 $\left(\frac{x}{y} + m\right)(x-y)^5$ 的展开式中 $x^2 y^3$ 的系数为 -15 , 可得 $C_5^4(-1)^4 + m \cdot C_5^3(-1)^3 = -15$, 即 $5 - 10m = -15$, 解得 $m=2$.

7. B 【解析】 $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)^3 = \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right]^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^6$,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 \text{ 的展开式的通项 } T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r x^{6-2r}.$$

令 $6-2r=4$, 解得 $r=1$, 则 $T_2 = C_6^1 x^4 = 6x^4$, 故 x^4 的系数为 6.



- 8. 60 【解析】**将 $(x^2+x+y)^6$ 看作 6 个 (x^2+x+y) 因式相乘, 要得到 x^5y^3 , 需从 6 个因式中先选择 3 个因式取 y , 有 C_6^3 种不同的取法; 再从剩余 3 个因式中选择 2 个因式取 x^2 , 有 C_3^2 种不同的取法, 最后从剩下的因式中取 x , 有 C_1^1 种不同的取法. 根据分步乘法计数原理, 可得 x^5y^3 的系数为 $C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = 20 \times 3 \times 1 = 60$.

一题多解 $(x^2+x+y)^6 = [x^2+(x+y)]^6$ 的展开式的通项

$T_{r+1} = C_6^r (x^2)^{6-r} (x+y)^r, r=0, 1, \dots, 6$. $(x+y)^r$ 的展开式的通项

$T_{k+1} = C_r^k x^{r-k} y^k$, 则 $(x^2+x+y)^6$ 的展开式的通项为

$C_r^k x^{12-2r} C_r^k x^{r-k} y^k = C_6^r C_r^k x^{12-r-k} y^k, 0 \leq k \leq r \leq 6, k, r \in \mathbf{N}$, 由题得

$$\begin{cases} 12-r-k=5, \\ k=3, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} r=4, \\ k=3, \end{cases} \text{ 则 } x^5y^3 \text{ 的系数是 } C_6^4 C_4^3 = 60.$$

- 9. 1 120 【解析】** $\left(4\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 4\right)^4 = \left(\frac{4x-4\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^4 = \frac{(2\sqrt{x}-1)^8}{x^2}$,

$(2\sqrt{x}-1)^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r (2\sqrt{x})^{8-r} (-1)^r =$

$$C_8^r 2^{8-r} \cdot (-1)^r x^{4-\frac{r}{2}} (r=0, 1, 2, \dots, 8).$$

令 $4-\frac{r}{2}=2$, 解得 $r=4$, 所以常数项为 $C_8^4 2^4 (-1)^4 = 1\ 120$.

- 10. A 【解析】(换元法)** 令 $t = \frac{x}{2} - 1$, 可得 $x = 2(t+1), 1-x = 1-$

$$2(t+1) = -2t-1, \text{ 所以 } (1-x)^{10} = (-1-2t)^{10} = (1+2t)^{10}.$$

$(2t+1)^{10}$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_{10}^r (2t)^{10-r} = C_{10}^r \cdot 2^{10-r} t^{10-r},$

$r=0, 1, 2, 3, \dots, 10$, 令 $10-r=2$, 可得 $r=8$, 所以 $a_2 = C_{10}^8 \times 2^2 =$

$$180.$$

一题多解

(配凑法) $(1-x)^{10} = \left[-2\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]^{10}$, 其

展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k (-2)^{10-k} \left(\frac{1}{2}x-1\right)^{10-k} (-1)^k$. 令

$10-k=2$, 得 $k=8$, 故 $T_9 = C_{10}^8 (-2)^2 \left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 (-1)^8 =$

$$180 \left(\frac{1}{2}x-1\right)^2, \text{ 故 } a_2 = 180.$$

- 11. D 【解析】**观察式子 $2\ 023^{2\ 025} = 2\ 024a+b$, 不难发现 b 就是等式左边 $2\ 023^{2\ 025}$ 除以 $2\ 024$ 后的余数. 要求乘方的余数, 联想到二项展开式的应用.

$$\therefore 2\ 023^{2\ 025} = (2\ 024-1)^{2\ 025} = C_{2\ 025}^0 2\ 024^{2\ 025} - C_{2\ 025}^1 2\ 024^{2\ 024} + \dots +$$

$$C_{2\ 025}^{2\ 024} 2\ 024 - C_{2\ 025}^{2\ 025} = 2\ 024 (C_{2\ 025}^0 2\ 024^{2\ 024} - C_{2\ 025}^1 2\ 024^{2\ 023} + \dots +$$

$$C_{2\ 025}^{2\ 024} - 1) + 2\ 024 - C_{2\ 025}^{2\ 025}, \therefore b = 2\ 024 - 1 = 2\ 023. \text{ 故选 D.}$$

- 12. C 【解析】** $\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数和为 2^n ,

$$\therefore 2^n = 64, \therefore n = 6.$$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r x^{6-2r}.$



令 $6-2r=0$, 解得 $r=3$, 则 $T_4=C_6^3=20$. 故选 C.

13. D 【解析】令 $f(x) = (2+3x)^{2026} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2026}x^{2026}$, 求导得 $f'(x) = 6078 \times (2+3x)^{2025} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + 2026a_{2026}x^{2025}$,

令 $x=-1$, 则 $f'(-1) = a_1 - 2a_2 + 3a_3 - \cdots - 2026a_{2026} = -6078$.

14. B 【解析】 $(3-x)^n$ 的展开式的通项 $T_{k+1} = C_n^k 3^{n-k} (-x)^k$, 令 $k=2$, 得 $T_3 = C_n^2 3^{n-2} x^2$.

$(3-x)^n$ 的展开式中 x^2 的系数为 $f(n)$, 则 $f(2) = C_2^2 \cdot 3^0 = 1$,

$f(3) = C_3^2 \cdot 3^1 = 9$, $f(4) = C_4^2 \cdot 3^2 = 54$, $\cdots$, $f(n) = C_n^2 \cdot 3^{n-2}$.

因为 $\frac{3^1}{f(2)} + \frac{3^2}{f(3)} + \frac{3^3}{f(4)} + \cdots + \frac{3^{n-1}}{f(n)} = 5 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$,

且 $\frac{3^1}{1} + \frac{3^2}{3 \times 3^1} + \frac{3^3}{6 \times 3^2} + \frac{3^4}{10 \times 3^3} + \frac{3^5}{15 \times 3^4} = 3 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = 5$,

关键点

所以 $n=6$. 故选 B.

15. ACD 【解析】对于 A, 令 $x=0$, 得 $a_0=1$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $x=1$, 得 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025} = 0$ ①, 所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025} = -1$, 故 B 错误;

对于 C, $a_1x = C_{2025}^1 \cdot (-x)^1 = -2025x$, 所以 $a_1 = -2025$,

$a_{2024}x^{2024} = C_{2025}^{2024} \cdot (-x)^{2024} = 2025x^{2024}$, 所以 $a_{2024} = 2025$,

所以 $a_1 + a_{2024} = 0$, 故 C 正确;

对于 D, 令 $x=-1$, 则 $2^{2025} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2024} - a_{2025}$ ②,

①+②, 可得 $2^{2024} = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2024}$, 故 D 正确. 故选

ACD.

16. A 【解析】因为 $(2x-4)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$,

所以 $[(2x-4)^5]' = (a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5)'$, 即 $10(2x-4)^4 = a_1 +$

关键点

$2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4$.

令 $x=1$, 得 $\sum_{i=1}^5 (i \cdot a_i) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 10 \times (2-4)^4 = 160$. 故选 A.

17. ACD 【解析】在 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$ 中, 令 $x=1$, 可得所有项的系数

之和 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (提示: 求二项式展开式中所有项的系数之和, 可赋值 $x=1$).

对于 A, 求 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$ 的所有项的系数绝对值之和等价于求

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^n$ 的展开式中所有项系数之和, 令 $x=1$, 可得 $b_n =$

$\left(\frac{3}{2}\right)^n$, 故 A 正确;

对于 B, 二项式系数之和 $c_n = 2^n$ (提示: 二项展开式中所有项

的二项式系数之和为 2^n), 因为 $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{3}{2}\right)^n < 2^n$, 所以

$a_n < b_n < c_n$, 故 B 错误;



对于 C, $\frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n} = 3^n + \frac{1}{3^n}$, 因为 $3^n \geq 3$, 且 $g(n) = 3^n + \frac{1}{3^n}$ 随着 n 的增大而增大, 所以 $g(n) = 3^n + \frac{1}{3^n}$ 的最小值为 $g(1) = \frac{10}{3}$, 所以 $\frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{10}{3}$, 故 C 正确;

对于 D, $\frac{a_n}{c_n} + \frac{b_n}{c_n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 随着 n 的增大而减小, 所以 $\frac{a_n}{c_n} + \frac{b_n}{c_n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, 即 $a_n + b_n \leq c_n$, 故 D 正确. 故选 ACD.

18. -270 【解析】由 $(1-3x)^n$ 可得其展开式的通项 $T_{r+1} = C_n^r 1^{n-r} \cdot (-3x)^r = (-3)^r C_n^r x^r, r \in \mathbf{N}$.

令 $x = -1$, 得 $(1+3)^n = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$, 可得 $4^n = 1024$, 解得 $n = 5$.

当 $r = 3$ 时, $a_3 = (-3)^3 C_5^3 = -270$.

19. A 【解析】当 n 为偶数时, $(2x+1)^n$ 的展开式中二项式系数最大的项为第 $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ 项, 令 $\frac{n}{2}+1=7$, 得 $n=12$.

当 n 为奇数时, $(2x+1)^n$ 的展开式中二项式系数最大的项为第 $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$ 项和第 $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ 项,

令 $\frac{n-1}{2}+1=7$, 得 $n=13$; 令 $\frac{n+1}{2}+1=7$, 得 $n=11$.

所以结合选项可知 n 的值不可能是 10.

20. C 【解析】 $\left(2x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r (2x^2)^{6-r} \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^r = 2^{6-r} 3^r C_6^r x^{\frac{24-5r}{2}}$, 设第 $r+1$ 项为系数最大的项, 则有 $\begin{cases} 2^{6-r} 3^r C_6^r \geq 2^{5-r} 3^{r+1} C_6^{r+1} \\ 2^{6-r} 3^r C_6^r \geq 2^{7-r} 3^{r-1} C_6^{r-1} \end{cases}$, 解得 $\frac{16}{5} \leq r \leq \frac{21}{5}$, 即 $r=4$, 所以 $\left(2x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中, 系数最大的项是第 5 项.

21. A 【解析】由题意可知 $a_0 = C_2^0 + C_3^0 + \cdots + C_9^0 = 8$, $a_1 = C_2^1 + C_3^1 + \cdots + C_9^1 = 2+3+\cdots+9=44$,

且 $a_n = C_n^n + C_{n+1}^n + \cdots + C_9^n = C_{n+1}^{n+1} + C_{n+1}^n + \cdots + C_9^n = C_{n+2}^{n+1} + C_{n+2}^n + \cdots + C_9^n = \cdots = C_9^{n+1} + C_9^n = C_{10}^{n+1}$, $2 \leq n \leq 9, n \in \mathbf{N}^*$,

故 $a_2 = C_{10}^3 = 120 > 44$, 根据组合数的性质可知当 $n+1=5$, 即 $n=4$ 时, a_n 取到最大值, 因为 $a_k \geq a_i$ 恒成立, 所以 $k=4$. 故选 A.

22. BCD 【解析】二项式 $\left(ax^2 + \frac{1}{x}\right)^3$ 的展开式的通项 $T_{k+1} = C_3^k (ax^2)^{3-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_3^k a^{3-k} x^{6-3k}$, 当 $6-3k=0$, 即 $k=2$ 时, 可得 $C_3^2 a = 3$, 解得 $a=1$, 故 A 错误;
 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3 = x^6 + 3x^3 + 3 + \frac{1}{x^3}$, 其展开式中 x^3 的系数为 3, 故 B 正确;



各项系数之和为 $1+3+3+1=8$, 二项式系数之和为 $2^3=8$, 故 C 正确;

展开式中系数最大的项为第 2 项或第 3 项, 故 D 正确. 故选 BCD.

23. 60 【解析】依题意, $n=6$, $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r = C_6^r (-2)^r x^{6-\frac{3}{2}r} \quad (r=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

令 $6-\frac{3}{2}r=3$, 得 $r=2$, 故 x^3 的系数为 $C_6^2 (-2)^2 = 60$.

真题风向练

24. A 命题点 ①二项展开式中特定项的系数

【解析】由 $(a-\sqrt{x})^7 = (a-x^{\frac{1}{2}})^7$, 可得二项展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_7^r \cdot a^{7-r} \cdot (-x^{\frac{1}{2}})^r = (-1)^r \cdot C_7^r \cdot a^{7-r} x^{\frac{r}{2}}, r=0, 1, 2, \dots,$$

7, 令 $\frac{r}{2}=2$, 得 $r=4$, 则展开式中 x^2 的系数为 $(-1)^4 \cdot C_7^4 \cdot$

$a^{7-4} = 35a^3 = 280$, 解得 $a=2$, 故选 A.

第 1 章 真题综合测试

1. C 命题点 ①排列组合的应用

【解析】从 6 名同学中任选 1 名同学去甲场馆, 有 C_6^1 种选法, 然后从剩下的 5 名同学中任选 2 名同学去乙场馆, 有 C_5^2 种选法, 最后直接安排剩下的 3 名同学去丙场馆, 由分步乘法计数原理可知, 不同的安排方法共有 $C_6^1 C_5^2 = 60$ (种). 故选 C.

2. C 命题点 ①排列组合问题

【解析】由题意可知, 将 5 名志愿者分配到 4 个项目进行培训共有 $C_5^2 A_4^4 = 240$ (种) 不同的分配方案. 故选 C.

3. C 命题点 ①排列组合、分步乘法计数原理

【解析】方法一: 甲、乙两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有 $C_6^1 C_5^1 C_4^1 = 120$ (种). 故选 C.

方法二: 甲、乙从 6 种课外读物中各自选读 2 种, 选法有 $C_6^2 \times C_6^2 = 225$ (种), 其中, 甲、乙选读的读物完全相同的选法有 $C_6^2 = 15$ (种), 甲、乙选读的读物完全不同的选法有 $C_6^2 \times C_4^2 = 90$ (种), 因此所求选法共有 $225-15-90=120$ (种). 故选 C.

方法三: 从 6 种课外读物中任选 3 种, 选法有 $C_6^3 = 20$ (种), 然后把这 3 种读物分别安排为两人共同的读物、甲的读物、乙的读物, 排列方法有 $3!$ 种, 因此所求选法共有 $C_6^3 \times 3! = 120$ (种). 故选 C.

4. B 命题点 ①排列组合、分步乘法计数原理

【解析】先将丙和丁捆在一起有 A_2^2 种排列方式 (提示: 对于元素相邻的排列问题选用“捆绑法”), 然后将其与乙、戊排列有 A_3^3 种排列方式, 最后将甲插入中间两空中的一个有 C_2^1 种排列方式, 则由分步乘法计数原理得不同的排列方式共有 $A_2^2 A_3^3 C_2^1 = 24$ (种). 故选 B.

5. B 命题点 ①有条件的排列组合问题

【解析】先从 5 名志愿者中选出 1 名志愿者参加星期六、星



期日两天的公益活动,再从剩下的 4 名志愿者中选出 2 名志愿者分别参加星期六、星期日的公益活动,共有 $C_5^1 A_4^2 = 60$ (种)不同的安排方式. 故选 B.

6. C 命题点 ①古典概型概率的计算及排列、组合的应用

【解析】4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行,共有 $\frac{A_6^6}{A_2^2 A_4^4} = 15$ (种)排法(易错:元素相同的排列不要与元素不同的排列混淆),其中 2 个 0 相邻的排法共有 $\frac{A_5^5}{A_4^4} = 5$ (种),所以所求概率 $P = 1 - \frac{5}{15} = \frac{2}{3}$,故选 C.

一题多解 先排 2 个 0,有 $C_6^2 = 15$ (种)排法,再排 4 个 1,有 1 种排法,故共有 15 种排法. 若 2 个 0 不相邻,则先排 4 个 1,有 1 种排法,形成了 5 个空,再选 2 个空插入 0 有 $C_5^2 = 10$ (种)排法,所以所求概率 $P = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

7. 8 命题点 ①求二项展开式中特定项的系数

【解析】 $(x+2y)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r x^{4-r} (2y)^r = 2^r C_4^r x^{4-r} y^r$, $r=0, 1, 2, 3, 4$, 令 $r=1$, 则 $T_2 = 2^1 C_4^1 x^3 y = 8x^3 y$, 故 $x^3 y$ 的系数为 8.

8. -28 命题点 ①二项式定理的应用

【解析】 $(x+y)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} y^r$, 所以 $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 $x^2 y^6$ 的系数为 $C_8^6 + (-1)C_8^5 = -28$.

9. 288 命题点 ①两个计数原理、排列的应用

【解析】因为 6 个人排成一排,两端必须是大人,所以从 4 个大人中选两个站在两端,剩余 4 人全排列,有 $A_4^2 A_4^4 = 288$ (种)排法.

一题多解 6 个人全排列有 A_6^6 种排列方法. 其中:①两个孩子一个在队首,一个在队尾有 $A_2^2 A_4^4$ 种排列方法;②两个孩子一个在队首,另一个不在队尾有 $A_2^1 A_4^1 A_4^4$ 种排列方法;③两个孩子一个在队尾,另一个不在队首有 $A_2^1 A_4^1 A_4^4$ 种排列方法,则两端必须是大人的排法有 $A_6^6 - A_2^2 A_4^4 - 2A_2^1 A_4^1 A_4^4 = 720 - 48 - 384 = 288$ (种).

10. 64 命题点 ①组合、两个计数原理

【解析】由题知,选修 1 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有 $C_4^1 C_4^1 = 16$ (种);

选修 2 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有 $C_4^2 C_4^1 = 24$ (种);

选修 1 门体育类选修课和 2 门艺术类选修课的所有可能结果有 $C_4^1 C_4^2 = 24$ (种).

所以不同的选课方案共有 $16+24+24=64$ (种).

一题多解 选课方案可以分成两类:第一类,选修 2 门,总的方案数减去不符合要求的方案数,有 $C_8^2 - 2C_4^2 = 16$ (种);第二类,选修 3 门,有 $C_8^3 - 2C_4^3 = 48$ (种). 综上,不同的选课方案共有 $16+48=64$ (种).

11. 5 命题点 ①二项展开式中系数的最大值



【解析】二项式 $\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} =$

$$C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} x^k.$$

$$\text{由} \begin{cases} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \geq C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}, \\ C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \geq C_{10}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}, \end{cases} \text{解得 } \frac{29}{4} \leq k \leq \frac{33}{4}.$$

又 $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $k=8$. 所以所求系数的最大值为 $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$.

一题多解 展开式中系数最大的项一定在下面的 5 项中:

$$C_{10}^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 x^5, C_{10}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^4 x^6, C_{10}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^3 x^7, C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 x^8, C_{10}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^1 x^9, \text{计算可得, 所求系数的最大值为 } C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5.$$

12.1 15 命题点 ⊙ 二项式定理

【解析】 $(1-2x)^4 = a_0 + a_1(-2x) + a_2(-2x)^2 + a_3(-2x)^3 + a_4(-2x)^4$, 结合 $(1-2x)^4$ 的展开式可知 $a_0 = C_4^0 = 1, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$ (另解: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2^4 - 1 = 15$).

一题多解 (赋值法) 令 $x=0$, 可得 $a_0=1$;

$$\text{令 } x = -\frac{1}{2}, \text{ 可得 } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \left[1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^4 = 16,$$

$$\text{故 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16 - a_0 = 15.$$

13.24 112 命题点 ⊙ 排列组合的实际应用

【解析】从第 1 行中选 1 个方格, 有 4 种选法;

从第 2 行中选 1 个方格, 有 3 种选法 (提示: 第 1 行选中的方格正下方的方格不能选);

同理, 从第 3 行中选 1 个方格, 有 2 种选法; 从第 4 行中选 1 个方格, 有 1 种选法, 所以不同的选法共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (种).

设原表格中第 i 行第 j 列的数为 $a_{ij} (i, j=1, 2, 3, 4)$, 对表格中的数作如下变换: 每列先去掉十位的数, 再将每行减去行号,

1	1	1	0	→	0	0	0	-1
2	2	3	2		0	0	1	0
3	2	3	3		0	-1	0	0
5	4	4	4		1	0	0	0

上述变换可以保证 4 个数之和取到最大值的方格的取法与变换前取到最大值的取法一致, 故所求最大值为 $a_{12} + a_{23} + a_{34} + a_{41} = 21 + 33 + 43 + 15 = 112$.